Тема лекции 10. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложения функций в ряды Маклорена.

Цель лекции:
Дать студентам понимание формулы Тейлора, частного случая — ряда Маклорена, а также научить применять разложения для приближённых вычислений и анализа функций.

Основные вопросы:

1. Понятие разложения функции в ряд Тейлора.
2. Ряд Маклорена как частный случай ряда Тейлора.
3. Формула Тейлора с остаточным членом.
4. Условия разложимости функции в степенной ряд.
5. Разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена.
6. Применение разложений к вычислениям и приближениям функций.

Для приложений важно уметь данную функцию f(x) разлагать в степенной ряд, т. е. функцию f(x) представлять в виде суммы степенного ряда.

Как известно, для любой функции f(x), определенной в окрестности точки x_0 и имеющие в ней производные до (n+1) -го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \qquad (1)$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, $c \in (x_0; x)$ - остаточный член в формуле Лагранжа.

Формулу (1) кратко можно написать в виде

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

где $P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ - многочлен Тейлора

Если функция f(x) имеет производные любых порядков (т. е. Бесконечно дифференцируема) в окрестности точки x0 и остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$), то из формулы Тейлора получается разложение функции f(x) по степеням ($x - x_0$), называемое рядом Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (2)$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим разложение функции по степеням x в так называемый ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n \qquad (3)$$

Отметим, что ряд Тейлора можно формально построить для любой бесконечно дифференцируемой функции (это необходимое условие) в окрестности точки x_0 . Но отсюда еще не следует, что он будет сходиться к данной функции f(x) ; он может оказаться расходящимся или сходиться, но не к функции f(x).

Теорема 1. Для того чтобы ряд Тейлора (2) функции f(x) сходился к f(x)в точке x , необходимо и достаточно, чтобы в этоы точке остаточный член формулы Тейлора (1) стремился к нулю при , т.е. чтобы $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Таким образом, задача разложения функции f(x) в степенной ряд сведена по существу к определению значений x, при которых $R_n(x) \to 0$ (при $n \to \infty$). Если сделать это не просто, то следует каким-нибудь иным способом убедиться, что написанный ряд Тейлора сходится к данной функции.

На практике часто пользуются следующей теоремой, которая дает простое достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.

Теорема 2. Если модули всех производных функций f(x) ограничены в окрестности точки x_0 одним и тем же числом M > O, то для любого x из этой окрестности ряд Тейлора функции f(x) сходится к функции f(x), т. е. имеет место разложение (2).

Для разложения функции f(x) в ряд Маклорена (3) нужно:

а) найти производные $f'(x),\ f''(x), \dots, f^n(x), \dots$

б) вычислить значения производных в точке $x_0 = 0$;

в) написать ряд (3) для заданной функции и найти его интервал сходимости;

г) найти интервал (-R; R), в котором остаточный член ряда Маклорена $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Если такой интервал существует, то в нем функция f(x) и сумма ряда Маклорена совпадают.

Замечание. В интервале сходимости степенного ряда остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$.

Приведем таблицу, содержащую разложения в ряд Маклоренанекоторых элементарных функций (эти разложения следуют запомнить):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad x \in (-\infty; \infty) \tag{4}$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \qquad x \in (-\infty; \infty) \tag{5}$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \qquad x \in (-\infty; \infty) \tag{6}$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \qquad x \in (-1; 1] \tag{7}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad x \in (-1; 1) \tag{8}$$

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = e^x$

Производые этой функции:

$y' = (e^x)' = e^x$, $y'' = (e^x)' = e^x$, ... , $f^{(n)}(x) = \left(e^x\right)^{(n)} = e^x$. Тогда значение функции и всех ее производных в точке $x = 0$:

$y' = e^0 = 1$, $y'' = e^0 = 1$, ... , $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

Подставляя эти значения в уравнение (3), получим разложение исходной функции в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

Областью сходимости этого ряда является интервал $(-\infty, \infty)$

Пример 2. $f(x) = 5^x$ -разложить в ряд Маклорена.

$5^x = e^{ln5^x} = e^{xln5}$ в (4) заменяя x на $xln5$ получим:

$$5^x = 1 + 1 + \frac{ln5}{1!}x + \frac{ln^2 5}{2!}x^2 + \cdots + \frac{ln^n 5}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty; \infty)$$

Контрольные вопросы:

- Дайте определение ряда Тейлора.
- Чем ряд Маклорена отличается от ряда Тейлора?
- Как выглядит формула Тейлора с остаточным членом?
- Какие функции можно разложить в ряд Маклорена?
- Приведите примеры разложения элементарных функций (e^x, sin x, cos x).
- Для чего используют разложения Тейлора и Маклорена?

Рекомендуемая литература:

1. Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы. Алматы, Санат, 1994
2. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика. Алматы, ҚБТУ, 2004
3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, Иль-Тех-Кітап, 2003
4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: «Наука». – 1989. – 656 с.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, М: «Наука». – 1982.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М: «Наука». – 1991.
7. Шипачев В.С. Высшая математика
8. Ефимов Н.В., Краткий курс аналитической геометрии.
9. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика.